DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Mardi 14 Mai 1985 de 8 h à 12 h

A rédiger sur copies de couleur BLEUE

Toutes les fonctions qui interviennent dans ce problème sont des fonctions réelles de la variable réelle. a est un réel strictement positif. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et k un entier naturel, on dit que f est C^k sur I si cette fonction est k fois dérivable sur I, la dérivée k-ième étant elle-même continue sur I.

I.1°) Soit φ_a la fonction réelle définie par $\varphi_a(x) = a^x$.

a. Etudier et discuter, suivant les valeurs de a, les variations de φ_a.

b. On appelle C_a la courbe représentative de φ_a dans un repère orthonormé direct du plan affine euclidien orienté. Tracer, sur un même graphique, les courbes $C_{1/2}$, C_1 et C_2.

2°) On se propose de résoudre l'équation : $a^x = x$ (E).

a. Montrer que, pour $0 < a < 1$, l'équation (E) admet une solution et une seule x_o dans $\mathbb{R}$.

b. Déterminer une valeur approchée de x_o à 10^{-2} près, lorsque $a = \frac{1}{2}$, en indiquant la méthode utilisée.

3°) On suppose ici a strictement supérieur à 1.

a. Poser $g_a(x) = \varphi_a(x) - x$ et étudier les variations de g_a.

b. Montrer, en justifiant avec soin le résultat, que l'équation (E) n'admet pas de solution.

4°) On considère l'équation différentielle

$$(e^x - x)\, y' + (x - 1)\, y + 1 = 0 \qquad (1)$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x.

a. Montrer que la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène associée est de la forme :

$$y = C + \frac{P(x)}{e^x - x}$$

b. En utilisant la méthode de la variation de la constante, en déduire la solution générale de (1), en précisant s'il existe des solutions C^1 sur $\mathbb{R}$.

5°) Plus généralement, soit l'équation différentielle :

$$(a^x - x)\, y' + (x \operatorname{Log} a - 1)\, y + \operatorname{Log} a = 0 \qquad (2)$$

Trouver la solution générale de l'équation (2) sur des intervalles judicieusement choisis. Discuter, suivant les valeurs de a, s'il existe des solutions C^1 sur $\mathbb{R}$.

II. Dans cette partie, on étudie les fonctions f_a définies par :

$$f_a(x) = \frac{1}{a^x - x} .$$

1°) Préciser le domaine de définition de f_a. Pour quelles valeurs de x f_a est-elle dérivable ? Quelle est alors cette dérivée ? Vérifier que f_a est solution de l'équation différentielle (2).

2°) On suppose ici $a > 1$.

a. Dresser le tableau des variations de f_a. Montrer que f_a admet un maximum pour une valeur x_1 que l'on précisera. Discuter le signe de x_1, suivant les valeurs de a.

b. On appelle Γ_a la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé direct du plan affine euclidien orienté. Construire, sur un même graphique, Γ_2, Γ_e et Γ_4.

3°) Si $0 < a < 1$, montrer que f_a est strictement monotone sur des intervalles que l'on précisera. Dresser le tableau des variations. Tracer $\Gamma_{1/2}$.

4°) La suite récurrente (v_n) est définie par :

$$v_0 = 1$$
$$v_{n+1} = f_e(v_n) .$$

a. Calculer les 10 premiers termes de la suite.

b. Montrer qu'elle est convergente.

c. Calculer sa limite ℓ à 10^{-2} près.

II. Dans ce paragraphe, on se limite au cas où $a > 1$.
On étudie alors la fonction

$$x \longmapsto F_a(x) = \int_0^x \frac{dt}{a^t - t} .$$

1°) Etudier les variations de F_a.
Préciser les branches infinies.

2°) Etudier, suivant les valeurs de a, l'existence de points d'inflexion ainsi que le signe de leur abscisse.

3°) Représenter sur un même graphique les divers types de courbes possibles.

IV. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n - n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

1°) En utilisant éventuellement les résultats du III.1°), montrer que cette série est convergente.

2°) On se propose de faire un calcul approché de la somme S de cette série.

a. Montrer que : $2^n - n \geqslant 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire une majoration de $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p - p}$.

c. ε étant un réel strictement positif, comment choisir n pour que $R_n < \varepsilon$?

d. En déduire une valeur approchée de S à 10^{-6} près.

V. a étant supérieur à 1, on se propose d'étudier la série entière de terme général $u_n(x) = f_a(n) . x^n$ $(x \in \mathbb{R})$.

1°) Déterminer le rayon de convergence de cette série.

2°) Quel est son domaine de convergence ? Discuter suivant les valeurs de a.

3°) Que se passe-t-il pour a = 1 ?

N.B. Les parties IV et V sont largement indépendantes des parties I, II et III.

Note de l'U.P.S. : grosse erreur au I 3°) b : (E) admet 2 solutions si $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ ce qui complique singulièrement les questions suivantes quand $a > 1$!